

2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Obsah

Pojmy: exponenciálna a logaritmická funkcia, základ exponenciálnej a logaritmickej funkcie, **číslo e**, logaritmus, prirodzený logaritmus, geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, $(a^r)^s = a^{rs}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$, $r, s \in R$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ pre $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x \in R$,
- $\log_a r + \log_a s = \log_a (rs)$, $\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$, $r, s > 0$,
- $\log_a (r^s) = s \log_a r$ pre $a > 0$, $a \neq 1$, $r > 0$, $s \in R$,
- $\log_r s = \frac{\log_a s}{\log_a r}$ pre $a, s, r > 0$, $a, r \neq 1$,
- $a^{\log_a x} = x$ pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)
(exponenciálna funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti Vlastnosti a vzťahy pri úprave výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť exponenciálne rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie a^x v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho „význačných“ bodov (t.j. $(0,1)$, $(1,a)$),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola funkcie a^x na danom intervale,
- vyjadriť n -tý člen geometrickej postupnosti (pre konkrétne **aj všeobecné** n) pomocou jej prvého (alebo iného než n -tého) člena a kvocientu q ,
- nájsť súčet n za sebou nasledujúcich členov geometrickej postupnosti (pre konkrétne **aj všeobecné** n),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní geometrickej postupnosti v závislosti od jej prvého člena a kvocientu,
- **opísať správanie sa funkcií $f(x) = a^x$, kde $a > 1$, pre hodnoty x zväčšujúce sa do $+\infty$ alebo $-\infty$ (pozri tiež 2.6 Limita a derivácia, geometrický rad)**,

(logaritmická funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti Vlastnosti a vzťahy pri úpravách výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť logaritmické rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie $\log_a x$ v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho „význačných“ bodov (t.j. $[1, 0]$, $[a, 1]$),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola logaritmickej funkcie na danom intervale,
- vyriešiť jednoduché príklady na výpočet úrokov,
- **opísať správanie sa funkcií $f(x) = \log_a x$, kde $a > 1$, pre hodnoty x zväčšujúce sa do $+\infty$ alebo blížiac sa k 0 (pozri tiež 2.6 Limita a derivácia, geometrický rad)**.

EXPONENCIÁLNA FUNKCIA, EXPONENCIÁLNA ROVNICA

1. Určte definičný obor funkcií: $f_1: y = \sqrt{2^x - 3^x}$

$$f_2: y = \frac{1}{5\sqrt{4-x^2}}$$

2. Zistite, či funkcia $g: y = 3^{x+1}$ je *párna* alebo *nepárna*.
3. Riešte v R: a) $\frac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = \frac{(0,04)^x}{25}$ b) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
4. Riešte v R: a) $3 \cdot 9^{2x} - 9^{x+2} - 9^{x-1} + 3 = 0$ b) $\sqrt{5^{3x} + 19} - \sqrt{5^{3x} - 4} = 1$
5. Rozhodnite o pravdivosti výrokov: a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-0,7} < 1$ b) $(0,75)^5 \leq (0,75)^7$ c) $\left(\frac{7}{4}\right)^4 > \left(\frac{7}{4}\right)^6$

LOGARITMICKÁ FUNKCIA, LOGARITMICKÁ ROVNICA

1. Určte *definičný* obor funkcie $f(x) = \frac{4}{\log(3-x) - \log(2x+6)}$ a vypočítajte, pre ktoré $x \in D(f)$ je hodnota $f(x)$ *záporná*.
2. Zjednodušte: $\log_5 \left[\frac{\log_5 5 - \log_5 1}{-\log_5 0,2 - \log_5 (\sqrt[3]{25})} + 2 \right]$.
3. Riešte v R: a) $\log(x-2) + \log(3+x) = \log 6$ b) $2 \cdot \log 3x^2 + 3 \cdot \log 4x^3 = 4 \cdot \log 2x^2 + 4 \cdot \log 6x$
4. Riešte v R: a) $x^{(3+4 \cdot \log x)} = 10 \cdot x^6$ b) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) + 4 = 2x$
5. Porovnaj: a) $\log_5 12$ a $\log_5 15$ b) $\log_{0,2} 5$ a $\log_{0,2} 7$ c) $\log_{15} 19$ a 0

GEOMETRICKÁ POSTUPNOSŤ

1. Určte súčet prvých 10 členov GP, ak: $a_1 + a_3 = 20$ a $a_1 + a_2 + a_3 = 26$
2. Súčet štyroch po sebe idúcich čísel GP je 80. Určte ich, ak $a_4 = 9a_2$.
3. Dĺžky hrán kvádra tvoria GP. Jeho objem je 216 cm^3 . Súčet dĺžok hrán vychádzajúcich z jedného vrcholu je 21 cm. Určte rozmery kvádra.
4. Polčas premeny rádionuklidu X je cca 45 min. Aká časť z jeho východzej hmotnosti m_0 zostane po n hodinách rozpadu?
5. Určte 3 čísla, ktoré sú tri po sebe idúcimi členmi GP a ich dekadické logaritmy sú tri po sebe idúce členy AP s $d = -1$, ak súčet čísel je 3.
6. Ak pripočítate k číslam 2, 7, 17 to isté číslo, dostanete tri po sebe idúce členy GP. Určte ich.
7. Dokážte, že $\{2 \cdot 3^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ je GP, určte a_3 a súčet členov od tretieho po piaty.

NEKONEČNÝ GEOMETRICKÝ RAD

1. Menší koreň rovnice $2x^2 - 5x + 2 = 0$ dáva prvý člen nekonečného konvergentného geometrického radu, väčší koreň určuje jeho súčet. Určte *kvocient*.
2. Riešte v R a určte podmienky riešenia rovnice: a) $1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{6}{x+5}$
b) $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \dots = 2$ c) $x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + \dots = \frac{5}{3}$
3. Zapište čísla a) $0, \overline{645}$ b) $0,4\overline{7}$ ako zlomok v základnom tvare.
4. Vypočítajte dĺžku nekonečnej špirály zostrojenej zo štvrt'kružníc o polomeroch: $r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \dots$